תורת הקבוצות, תרגיל 11

1. קבוצה $A \subseteq R$ היא צפופה אם לכל קטע $[a,b]$ מתקיים $A \cap [a,b] \neq \emptyset$.
הוכח, כי קבוצת המספרים הרציונליים Q היא איחוד בן מניה של קבוצות צפופות זרות.

2. קבוצה $A \in R$ תיקרא קבוצה ממידה אפס אם לכל $\epsilon > 0$ קיימת סדרת קטעים $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ שסכום אורכיהם קטן מ- ϵ כך שמתקיים $A \subseteq \bigcup \{I_n\}_{n=1}^{\infty}$.

א. הוכח כי כל קבוצה בת מניה היא ממידה אפס.

ב. הוכח (באמצעות אקסיומת הבחירה) כי איחוד בן מניה של קבוצות ממידה אפס גם הוא קבוצה ממידה אפס.

ג. הוכח כי קבוצת המספרים בקטע $[0,1]$ שבהצגתם העשרונית לא מופיעה הספרה 5 היא קבוצה ממידה אפס שאיננה בת מניה.

3. תהי X קבוצה אינסופית.

א. הוכח (באמצעות אקסיומת הבחירה) כי ל- X יש תת קבוצה בת מניה.

ב. הוכח, כי ניתן להציג את X כאיחוד זר של קבוצות בנות מניה.

הדרכה: התבונן באוסף F של כל המשפחות של תתי קבוצות בנות מניה זרות של X. הגדר על האוסף יחס סדר חלקי מתאים והשתמש בלמה של צורן. (לצורך שאלה זו, אוסף ומשפחה הן מילים נרדפות לקבוצה).

ג. הוכח (בהסתמך על סעיף ב') כי לכל עוצמה אינסופית a מתקיים $a + a = a$.

ד. תהי X קבוצה איסופית שעוצמתה a. תהי $S = \{Y \subseteq X : |Y| = a\}$. הוכח, כי $|S| = 2^a$.

הדרכה: לפי הסעיף הקודם, ניתן לרשום $X = A \cup B$ כאשר A, B זרות שעוצמתן a. התבונן בקבוצת תתי הקבוצות של X שמכילות את A.

4. יהי R יחס סדר חלקי על קבוצה X. הוכח (באמצעות הלמה של צורן) כי ניתן להשלים את R ליחס סדר לינארי על X.

תאריך ההגשה: 1.6.2005